Expression du terme général d'une suite récurrente

Exercice 1 [02293] [Correction]
Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$

b) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$.

Exercice 2 [02294] [Correction]
Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + \mathrm{i}.y_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 3 [02295] [Correction]
Soit (z_n) une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\bar{z}_n)$$

Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Exercice 4 [02296] [Correction]
Soit (u_n) et (v_n) les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.

b) Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

c) Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 5 [02297] [Correction]
Soient $\rho > 0$ et $\theta \in]0\,;\pi[$.
On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

a) Exprimer z_n sous forme d'un produit.

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} z_n$.

Exercice 6 [03048] [Correction]
Étudier la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

Exercice 7 [02056] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_n$$

Donner l'expression du terme général u_n de cette suite.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a) Posons $v_n = u_n + 1$. (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = 1$ donc $u_n = 2^n - 1 \to +\infty$.

b) Posons $v_n = u_n - 1$. (v_n) est géométrique de raison $1/2$ et $v_0 = -1$ donc $u_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1$.

Exercice 2 : [énoncé]
On a

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$$

donc

$$z_n = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n z_0$$

Or $\left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right| < 1$ donc $z_n \to 0$ puis $x_n, y_n \to 0$.

Exercice 3 : [énoncé]
Introduisons $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. On a

$$x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}$$

$x_n \to x_0$ et $y_n \to 0$ donc $z_n \to \mathrm{Re}(z_0)$.

Exercice 4 : [énoncé]

a) $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$ et $u_0 - v_0 = -1$ donc $(u_n - v_n)$ est constante égale à -1.

b) $v_n = u_n + 1$ donc $u_{n+1} = 5u_n + 2$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

c) $u_{n+1} - a = 5(u_n - a) + 4a + 2$. Pour $a = -1/2$, $(u_n - a)$ est géométrique de raison 5 et de premier terme $3/2$. Ainsi

$$u_n = \frac{3.5^n - 1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3.5^n + 1}{2}$$

Exercice 5 : [énoncé]

a) $z_1 = \rho\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2} = \rho\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$, $z_2 = \rho\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{4}}$,..., donc

$$z_n = \rho\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2^n}}$$

b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2^n} \to 1$ et

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}} \sim \frac{\sin\theta}{\theta}$$

donc

$$z_n \to \rho\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Exercice 6 : [énoncé]
On peut écrire $z_0 = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in]-\pi\,;\pi]$
On a alors

$$z_1 = \rho\frac{1+\mathrm{e}^{i\theta}}{2} = \rho\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}, z_2 = \rho\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{4}},\ldots, z_n = \rho\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2^n}}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}$$

Si $\theta = 0$ alors $z_n = \rho \to \rho$.
Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin\frac{\theta}{2^n} \neq 0$ et

$$\sin\frac{\theta}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^n}$$

par exploitations successives de l'identité $\sin 2a = 2\sin a\cos a$.
On en déduit

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}} \to \frac{\sin\theta}{\theta}$$

Finalement

$$z_n \to \rho\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Exercice 7 : [énoncé]
$u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$,...
Par récurrence, on montre aisément

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + 1$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD